頂点代数と Costello-Gwilliam の因子化代数

名古屋大学大学院　多元数理科学研究科　多元数理科学専攻
西中祐介 (Yusuke NISHINAKA) *

概要

Costello-Gwilliam の因子化代数は (摂動的) 場の量子論における観測可能量の空間がもつ代数構造を記述する代数系である．一方で Borcherds によって導入された頂点代数は二次元共形場理論の代数的定式化として知られている．Costello-Gwilliam は複素平面上の因子化代数から頂点代数を構成する一般論を与えたが, そこで因子化代数に仮定されている離散条件が取り除けることを説明する．また可換な頂点代数から locally constant な因子化代数を構成できることを説明し, この構成と微分代数のジェット構成の間の関係を議論する．この報告は [N] に基づく．

1　導入

Costello と Gwilliam によって導入された因子化代数 (factorization algebra) は古典場および量子場の理論における観測可能量のなす空間の構造を定式化した代数系である．彼らは [CG17, CG21] で因子化代数の理論と摂動的場の量子論における Batalin–Vilkovisky (BV) 形式を発展させた．[CG17, CG21] の主結果の一つは古典場の理論に付随する因子化代数が変形量子化を許容するための十分条件を与えたことであり, これは Costello が [C11] で数学的に定式化した摂動的繰り込みを用いて証明された．

一方で Borcherds [Bo86] によって導入された頂点代数は二次元共形場理論の代数的枠組みとして知られている．したがって複素平面 $\mathbb{C}$ 上の因子化代数と頂点代数の間に自然な対応があると期待できる．実際, Costello と Gwilliam は [CG17, §5.3] で S^1-equivariant holomorphically translation invariant prefactorization algebra とよばれる前因子化代数から頂点代数を構成する一般的な方法を説明し, また [CG17, §5.4, §5.5] でアフィン頂点代数 (WZW 模型) や $\beta\gamma$ 頂点代数 ($\beta\gamma$ 系) に対応する因子化代数を個別に構成している．同様の方法で Williams [W17] は Viarasoro 頂点代数 (ミニマル模型) に対応する因子化代数を構成した．これらの [CG17, §5.4, §5.5] と [W17] による因子化代数の構成は factorization envelop とよばれる方法で行われている．一般の頂点代数に対する因子化代数の構成は Bruegmann [B20a] によって成されているが, 彼の構成と前述の factorization envelop を用いた構成の関係はよく分かっていない．

また因子化代数という概念には Beilinson と Drinfeld [BD04] によって導入された別のものがある．Beilinson-Drinfeld の因子化代数はカイラル代数とよばれるものと本質的に同じものであり, これは二次元共形場理論の代数幾何学的な定式化を与えるものである． さらにアフィン直線 $\mathbb{A}^1$ 上の translation-equivariant なカイラル代数と頂点代数の間の圏同値が知られている ([BD04, §0.15], [BDHK19, Corollary A.2])．Costello と Gwilliam は [CG17, §1.4.1] において二つの因子化代数の関係を発見的に述べているが, これを数学的な定理として証明することはまだ成されていない．

[N] の研究は元々, 頂点代数と圏同値になるような因子化代数の特徴づけを目標に始められたがそれは現在達成されていない．しかしながらその過程で頂点代数と因子化代数の関係について新たな結果が得られたので報告する．

* E-mail: m21035a@math.nagoya-u.ac.jp

記号と用語

- 位相空間 X に対しその開集合系を $\mathfrak{U}_X$ で表す．また各点 $x \in X$ の開近傍全体を $\mathfrak{U}_X(x)$ で表す．
- $R \in \mathbb{R}_{>0}$ と $z \in \mathbb{C}$ に対し $D_R(z) \coloneqq \{\zeta \in \mathbb{C} \mid |\zeta - z| < R\}$ で開円盤を表す．
- $S^1 \coloneqq \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ で単位円周を表す．
- $l \in \mathbb{Z}_{>0}$ と部分集合 $E \subset \mathbb{C}$ に対し $\mathrm{Conf}_l(E) \coloneqq \{(z_1, \ldots, z_l) \in E^l \mid z_i \neq z_j \, (i \neq j)\}$ で配置空間を表す．
- $\mathsf{Mod}\,\mathbb{C}$ で $\mathbb{C}$ 上の線形空間と $\mathbb{C}$-線形写像がなす圏を表す．
- $\mathsf{LCS}_{\mathbb{C}}$ で $\mathbb{C}$ 上の局所凸空間と連続な $\mathbb{C}$-線形写像がなす圏を表す．
- 単に可換代数といったら $\mathbb{C}$ 上の単位的かつ結合的な可換代数のこととする．

2 因子化代数

前因子化代数は位相空間上の前余層 (precosheaf) に因子化積 (factorization product) とよばれる構造を与えたものである．この節では因子化代数の定義を簡単に述べて, その物理的意味を解説する．位相空間 X と完備かつ余完備な対称モノイダル圏 M を固定しよう．M のテンソル積を $\otimes$ で表し, 単位対象を 1_{M} で表す．

M に値をもつ X 上の前余層とは関手 $\mathcal{F} \colon \mathfrak{U}_X \to \mathsf{M}$ のことである．ここで開集合系 $\mathfrak{U}_X$ を包含関係で圏とみなした．開集合の包含関係 $U \subset V$ に対応する M の射を

$$\mathcal{F}_V^U \colon \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$$

で表す．前層の茎と双対的に各点 $x \in X$ の余茎 $\mathcal{F}^x \in \mathrm{Ob}\,\mathsf{M}$ が射影極限として定義される:

$$\mathcal{F}^x \coloneqq \varprojlim_{U \in \mathfrak{U}_X(x)} \mathcal{F}(U).$$

射影極限の自然な射を

$$\mathcal{F}_U^x \colon \mathcal{F}^x \to \mathcal{F}(U) \quad (U \in \mathfrak{U}_X(x))$$

で表す．

M に値をもつ X 上の前因子化代数 ([CG17, §3.1.1, §3.1.2]) とは次のデータの組で自然な両立条件を満たすものである:

- 前余層 $\mathcal{F} \colon \mathfrak{U}_X \to \mathsf{M}$.
- M の射の族
$$\mathcal{F}_W^{U,V} \colon \mathcal{F}(U) \otimes \mathcal{F}(V) \to \mathcal{F}(W) \quad (U, V, W \in \mathfrak{U}_X, \, U \sqcup V \subset W).$$
各 $\mathcal{F}_W^{U,V}$ を因子化積とよぶ．
- M の射 $\eta \colon 1_{\mathsf{M}} \to \mathcal{F}(\varnothing)$．これを単位射とよぶ．

例えば定義に現れる両立条件の一つとして結合律がある．これは開集合 $U_1, U_2, U_3, V_1, V_2, W \subset X$ で

$$U_1 \sqcup U_2 \subset V_1, \quad U_2 \sqcup U_3 \subset V_2, \quad U_1 \sqcup V_2 \subset W, \quad U_3 \sqcup V_1 \subset W$$

を満たすものに対し

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
(\mathcal{F}(U_1)\otimes\mathcal{F}(U_2))\otimes\mathcal{F}(U_3) \arrow[rr, "\sim"] \arrow[d, "\mathcal{F}_{V_1}^{U_1,U_2}\otimes\mathrm{id}_{\mathcal{F}(U_3)}"'] & & \mathcal{F}(U_1)\otimes(\mathcal{F}(U_2)\otimes\mathcal{F}(U_3)) \arrow[d, "\mathrm{id}_{\mathcal{F}(U_1)}\otimes\mathcal{F}_{V_2}^{U_2,U_3}"] \\
\mathcal{F}(V_1)\otimes\mathcal{F}(U_3) \arrow[dr, "\mathcal{F}_W^{V_1,U_3}"'] & & \mathcal{F}(U_1)\otimes\mathcal{F}(V_2) \arrow[dl, "\mathcal{F}_W^{U_1,V_2}"] \\
& \mathcal{F}(W) &
\end{tikzcd}$$

は可換であるという条件である．このような両立条件から有限個の開集合 $U_1,\dots,U_n,V\subset X$ で $U_1\sqcup\cdots\sqcup U_n\subset V$ を満たすものに対し M の射

$$\mathcal{F}_V^{\{U_i\}_{i=1}^n}\colon \bigotimes_{i=1}^n\mathcal{F}(U_i)\to\mathcal{F}(V)$$

が帰納的に定義される．因子化代数 ([CG17, §6.1.1]) は層のように descent condition を満たす前因子化代数であるが $\mathfrak{U}_X$ の Grothendieck 位相として Weiss 被覆を用いる．詳細は省略する．

群 G が位相空間 X に作用している状況を考える．このとき G-同変な前因子化代数とは前因子化代数 $\mathcal{F}\colon\mathfrak{U}_X\to\mathsf{M}$ と M の射の族

$$\sigma_{a,U}\colon\mathcal{F}(U)\to\mathcal{F}(aU)\quad(a\in G,U\in\mathfrak{U}_X)$$

の組で $\mathcal{F}$ の前因子化代数の構造と両立するものである．

以上の準備のもとで前因子化代数の物理的な意味を説明しよう．

可微分多様体 M とその上の前因子化代数 $\mathcal{F}$ が与えられたとする．M は考えている場の理論の時空を表し，各開集合 $U\subset M$ に対して $\mathcal{F}(U)$ は U 上の場に依存する物理量/観測可能量の空間を表していると解釈される[*1]．

例 2.1 ([CG17, §1.1]). 1 つの粒子が 3 次元空間 $\mathbb{R}^3$ 内のある領域 D を運動しているとする．これは空間次元 0 の場の理論と考えることができ, 時空は $M=\mathbb{R}$ (時間軸) である．

この 1 粒子系を古典的に考えよう．各開集合 $U\subset M$ に対して U 上の場とは単に関数 $f\colon U\to D$ のことである．U 上の場全体の集合 $\mathrm{Map}(U,D)$ は時間間隔 U に粒子がとり得る軌跡全体であるが, 系の運動が Lagrangian $L\colon T_{\mathbb{R}}D\times U\to\mathbb{R}$ で記述されているとき実際の軌跡は L に関する Euler-Lagrange 方程式を満たす．Euler-Lagrange 方程式を満たす軌跡 $f\colon U\to D$ 全体のなす線形空間を $\mathrm{EL}(U)$ で表そう．すると観測可能量の空間 $\mathrm{Obs}^{\mathrm{cl}}(U)$ は $\mathrm{EL}(U)$ 上の実数値関数全体がなす可換代数であると考えられる．$\mathrm{EL}\colon U\mapsto\mathrm{EL}(U)$ は関数の制限によって層になるので $\mathrm{Obs}^{\mathrm{cl}}\colon U\mapsto\mathrm{Obs}^{\mathrm{cl}}(U)$ は余層になる．さらに $\mathrm{Obs}^{\mathrm{cl}}(U)$ の可換代数の構造により

$$\mathrm{Obs}^{\mathrm{cl}}(U)\otimes\mathrm{Obs}^{\mathrm{cl}}(V)\longrightarrow\mathrm{Obs}^{\mathrm{cl}}(W)\otimes\mathrm{Obs}^{\mathrm{cl}}(W)\longrightarrow\mathrm{Obs}^{\mathrm{cl}}(W)$$

を因子化積として因子化代数になる．しかしこの因子化積は $U\cap V\neq\varnothing$ であっても定義される．

因子化積の定義において本質的に $U\cap V=\varnothing$ が必要になるのは量子論においてである．上の 1 粒子系を量子的に考えよう．このとき開集合 $U\subset M$ に対して観測可能量の空間 $\mathrm{Obs}^{\mathrm{q}}(U)$ を与える方法はいくつか考えられると思うが, ここでは次のようにする: まず考え得る測定装置 $A,B,C,\dots$ を用意し, これらの装置を 1 粒子系に干渉させ実際に測定することを想像しよう．このとき観測可能量の空間 $\mathrm{Obs}^{\mathrm{q}}(U)$ は時間間隔 U にできる測定の全体とする．時間間隔 U と V が $U\subset V$ を満たすとき V の中で U の間は測定し $V\backslash U$ の間は何も測

[*1] 考えている場の理論からどのようにして物理量の空間と解釈できる前因子化代数を構成するかという問題は重要である．

定しないとすることで $\mathrm{Obs}^{\mathrm{q}}(U) \to \mathrm{Obs}^{\mathrm{q}}(V)$ という射が得られる．一方で同じ時間間隔 U に二つの装置 A と B を用いて同時に測定することはできない．なぜなら量子論の場合, 測定によって生じる粒子との相互作用を無視することができず, 装置 A は粒子と装置 B の複合系を測定していることになるからである．しかし時間間隔 U と V が $U \cap V = \varnothing$ を満たす場合には, U の間に装置 A で測定し A を取り除いた後 V の間に装置 B で測定するということが考えられる．よって時間間隔 U, V, W で $U \sqcup V \subset W$ を満たすもの対し

$$\mathrm{Obs}^{\mathrm{q}}(U) \otimes \mathrm{Obs}^{\mathrm{q}}(V) \longrightarrow \mathrm{Obs}^{\mathrm{q}}(U \sqcup V) \longrightarrow \mathrm{Obs}^{\mathrm{q}}(W)$$

という射が得られた．このような量子論における観測の問題が因子化積の定義の背景にある．

また因子化代数の枠組みは, 場の量子論において重要な計算手法である作用素積展開を再現するのに十分なデータを備えている [C23, §1]. $\mathcal{F}$ を $\mathbb{R}^n$ 上の translation-equivariant な前因子化代数, つまり加法群 $\mathbb{R}^n$ の自然な作用で同変な前因子化代数とする．$\mathcal{F}$ の同変構造を

$$\sigma_{a,U} \colon \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(U+a) \quad (a \in \mathbb{R}^n, U \in \mathfrak{U}_{\mathbb{R}^n})$$

と表そう．$\mathcal{F}(U)$ を U 上の場に依存する観測可能量の空間とみなすとき, 各点 $x \in \mathbb{R}^n$ の余茎 $\mathcal{F}^x$ は x の無限小近傍における場の振る舞いにのみ依存する観測可能量の空間と解釈できる．[C23, §1.2] では $\mathcal{F}^x$ の元を local operator と呼んでいる．$\mathcal{F}$ は translation-equivariant なので $\mathcal{F}^x \cong \mathcal{F}^0$ が成り立つ．よって local operator として $0 \in \mathbb{R}^n$ まわりのものを考えれば十分である．

半径 $R \in \mathbb{R}_{>0}$ で中心 $x \in \mathbb{R}^n$ の開球を $D_R(x)$ で表すことにしよう．$\{D_R(x)\}_{R \in \mathbb{R}_{>0}}$ は x の基本開近傍系で有限交差的だから, 余茎 $\mathcal{F}^x$ は

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}^x &= \varprojlim_{R \in \mathbb{R}_{>0}} \mathcal{F}(D_R(x)) \\
&= \left\{ (a_R)_{R \in \mathbb{R}_{>0}} \in \prod_{R \in \mathbb{R}_{>0}} \mathcal{F}(D_R(z)) \mid \forall r, R \in \mathbb{R}_{>0},\, r < R \implies \mathcal{F}_{D_R(x)}^{D_r(x)}(a_r) = a_R \right\}
\end{aligned}$$

で与えられる．また射影極限の自然な射は, 射影

$$\mathcal{F}^x \to \mathcal{F}(D_R(x)), \quad \{a_r\}_{r \in \mathbb{R}_{>0}} \mapsto a_R$$

である．

いま二つの local operator $a, b \in \mathcal{F}^0$ を考えよう．$R \in \mathbb{R}_{>0}$ と $x \in D_R^{\times}(0) = D_R(0) \backslash \{0\}$ に対し

$$\mu_{x,0}^R(a,b) \coloneqq \mathcal{F}_{D_R(0)}^{D_r(x), D_r(0)} \big(\sigma_{x, D_r(0)} \mathcal{F}_{D_r(0)}^0(a) \otimes \mathcal{F}_{D_r(0)}^0(b) \big) \in \mathcal{F}(D_R(0)) \tag{2.1}$$

と定義する．ここで $r \in \mathbb{R}_{>0}$ を $D_r(x) \sqcup D_r(0) \subset D_R(0)$ となるように取ったが $\mu_{x,0}^R(a,b)$ の定義は同変前因子化代数の両立条件より r の取り方に依らない．よって

$$D_R^{\times}(0) \to \mathcal{F}(D_R(0)), \quad x \mapsto \mu_{x,0}^R(a,b)$$

という関数が得られた．この関数は x について解析的であるという仮定をしよう[*2]．すると $R \in \mathbb{R}_{>0}$ を小さくして x を 0 に近づけていくと $\mu_{x,0}(a,b) \in \mathcal{F}^0$ という積が定義でき, 作用素積展開

$$\mu_{x,0}(a,b) = \sum f_n(x) c_n \quad (c_n \in \mathcal{F}^0)$$

が得られるのではないかと期待できる．しかしこのアイデアをそのまま一般論として数学的に定式化することは容易ではない．

二次元共形場理論の作用素積展開は頂点代数を用いて記述できる．次の節では $\mathbb{C}$ 上の前因子化代数から頂点代数を構成し, 上のアイデアが二次元共形場理論の場合には正当化されることを説明する．頂点代数については [FBZ04] を参照されたい．

[*2] 解析性を述べるためには $\mathcal{F}(D_R(0))$ が位相線形空間の構造を持っている必要がある．

3　主結果 1

局所凸空間に値をとる $\mathbb{C}$ 上の前因子化代数から頂点代数を構成する方法 [N, §3.2] を解説する．この方法は Costello と Gwilliam によるもの [CG17, §5.3] および Bruegmann によるもの [B20a, §1.3] と同様のアイデアに基づくが次の点で優れている:

- 導入で触れたように Costello と Gwilliam は S^1-equivariant holomorphically translation invariant prefactorization algebras とよばれる前因子化代数から頂点代数を構成した．この前因子化代数は differentiable vector space のコチェイン複体の圏に値をとるものである (differentiable vector space については [CG17, §3.5.1] を参照)．Differentiable vector space の圏は多くの位相線形空間のクラスを部分圏として含み, かつ Abel 圏であるという著しい特徴をもつ．この特徴によって differentiable vector space の圏ではホモロジー代数を自由に使うことができる．しかしながら [CG17, Theorem 5.3.3] を見れば分かるように頂点代数の構造はコホモロジーのレベルに現れるので前因子化代数がコチェイン複体に値をとる必要はない．Differentiable vector space の概念は広く知られているわけではないので局所凸空間を使った方が分かりやすい．
- Bruegmann も [B20a, §1.3] において前因子化代数から頂点代数を構成している．彼は前因子化代数のとる値として bornological vector space を採用している．しかし彼が実際に前因子化代数から構成したものは geometric vertex algebra とよばれるものであり, 別のプレプリント [B20b] において geometric vertex algebra と頂点代数の圏同値を示している．したがって彼の構成は二段階に分かれており, 頂点代数と因子化代数の直接の対応が不明瞭になっている．それに対し [N, §3.2] では頂点代数を直接構成した．
- Costello-Gwilliam と Bruegmann による構成はどちらも前因子化代数に離散条件を課している ([CG17, Theorem 5.3.3] の条件 (iii) および [B20a, §1.3] の第一段落を参照)．[N, §3.2] では**この離散条件を仮定しなくても頂点代数の構成が可能であることを示した**．離散条件を取り除くために局所凸空間に値をもつ複素関数の解析学を用いた．

局所凸空間と連続線形写像がなす圏を $\mathsf{LCS}_{\mathbb{C}}$ で表す．$\mathsf{LCS}_{\mathbb{C}}$ を射影的テンソル積 $\otimes := \otimes_\pi$ で対称モノイダル圏とみなす．また等長変換群 $S^1 \ltimes \mathbb{C}$ の複素平面 $\mathbb{C}$ への自然な作用を考える．$\mathcal{F}\colon \mathfrak{U}_{\mathbb{C}} \to \mathsf{LCS}_{\mathbb{C}}$ を $S^1 \ltimes \mathbb{C}$-同変な前因子化代数としその同変構造を

$$\sigma_{(q,z),U}\colon \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}((q,z)U) \quad ((q,z) \in S^1 \ltimes \mathbb{C},\, U \in \mathfrak{U}_{\mathbb{C}})$$

で表す．

各 $R \in \mathbb{R}_{>0}$ と $(z_1, \ldots, z_l) \in \mathrm{Conf}(D_R(0))$ に対し局所凸空間の射 $\mu^R_{z_1,\ldots,z_l}\colon (\mathcal{F}^0)^{\otimes l} \to \mathcal{F}(D_R(0))$ を次のような合成として定める:

$$(\mathcal{F}^0)^{\otimes l} \xrightarrow{\otimes_{i=1}^l \mathcal{F}^0_{D_r(0)}} \bigotimes_{i=1}^l \mathcal{F}(D_r(0)) \xrightarrow{\otimes_{i=1}^l \sigma_{(1,z_i),D_r(0)}} \bigotimes_{i=1}^l \mathcal{F}(D_r(z_i)) \xrightarrow{\mathcal{F}^{D_r(z_1),\ldots,D_r(z_l)}_{D_R(0)}} \mathcal{F}(D_R(0))$$

ここで $r \in \mathbb{R}_{>0}$ を

$$D_r(z_1) \sqcup \cdots \sqcup D_r(z_l) \subset D_R(0)$$

となるように取ったが $\mu^R_{z_1,\ldots,z_l}$ の定義は r の取り方によらない．この $\mu^R_{z_1,\ldots,z_l}$ は (2.1) の多変数版になっていることに注意されたい．

また $\Delta \in \mathbb{Z}$ に対し

$$\mathcal{F}^0_\Delta := \varprojlim_{R \in \mathbb{R}_{>0}} \mathcal{F}(D_R(0))_\Delta,$$

$$\mathcal{F}(D_R(0))_\Delta \coloneqq \{a \in \mathcal{F}(D_R(0)) \mid \forall q \in S^1,\, \sigma_{q,D_R(0)}(a) = q^\Delta a\}$$

と定義する．各元 $a \in \mathcal{F}^0_\Delta \backslash \{0\}$ を $\mathcal{F}^0$ の斉次元とよび $\Delta(a) \coloneqq \Delta$ と表す．

定義 3.1 ([N, Definition 3.2.7]). $S^1 \ltimes \mathbb{C}$-同変な前因子化代数 $\mathcal{F}\colon \mathfrak{U}_\mathbb{C} \to \mathsf{LCS}_\mathbb{C}$ は次の (i) から (iv) を満たすとき正則前因子化代数 (holomorphic prefactorization algebra) とよばれる:

(i) 任意の $0 < r < R$ と $\Delta \in \mathbb{Z}$ に対し $\mathcal{F}^{D_r(0)}_{D_R(0)}\colon \mathcal{F}(D_r(0))_\Delta \to \mathcal{F}(D_R(0))_\Delta$ は線形同型である．

(ii) 任意の $R \in \mathbb{R}_{>0}$ に対し $\mathcal{F}(D_R(0)) = 0$ $(\Delta \ll 0)$.

(iii) 任意の $R \in \mathbb{R}_{>0}$ に対し $\mathcal{F}(D_R(0))$ は準完備かつ Hausdorff な局所凸空間である．

(iv) 任意の $R \in \mathbb{R}_{>0}$ と斉次元 $a_1, \dots, a_l \in \mathcal{F}^0$ に対し、関数

$$\mathrm{Conf}_l(D_R(0)) \to \mathcal{F}(D_R(0)), \quad (z_1, \dots, z_l) \mapsto \mu^R_{z_1,\dots,z_l}(a_1 \otimes \cdots \otimes a_l)$$

は ([N, Definition A.1.3] の意味で) 正則である．

定義 3.1 の条件 (iv) が前節の作用素積展開の説明で仮定した解析性に対応している．また解析性が意味をもつために条件 (iii) が必要になる．

定理 3.2 ([N, Theorem 3.2.11, Proposition 3.3.2]). $\mathcal{F}\colon \mathfrak{U}_X \to \mathsf{LCS}_\mathbb{C}$ を正則前因子化代数とする．このとき線形空間

$$\mathbf{V}(\mathcal{F}) \coloneqq \bigotimes_{\Delta \in \mathbb{Z}} \mathcal{F}^0_\Delta$$

上には $\mu^R_{z_1,\dots,z_l}$ から誘導される $\mathbb{Z}$-次数付き頂点代数の構造が存在する．さらに $\mathcal{F}$ が locally constant([CG17, Definition 6.4.1]) であるとき $\mathbf{V}(\mathcal{F})$ は可換な頂点代数になる．

$\mathbf{V}(\mathcal{F})$ の頂点作用素 $Y(-,z)$ の定義を説明する．斉次元 $a, b \in \mathcal{F}^0$ と $R \in \mathbb{R}_{>0}$ に対し

$$D^\times_R(0) \to \mathcal{F}(D_R(0)), \quad z \mapsto \mu^R_{z,0}(a \otimes b)$$

は正則だから Laurent 展開できる ([N, Theorem A.5.4]):

$$\mu^R_{z,0}(a \otimes b) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} z^{-n-1}(a_{(n)}b)_R \quad (z \in D^\times_R(0)), \qquad (a_{(n)}b)_R \in \mathcal{F}(D_R(0)).$$

この $(a_{(n)}b)_R$ は $(a_{(n)}b)_R \in \mathcal{F}(D_R(0))_{\Delta(a)+\Delta(b)-n-1}$ および $\mathcal{F}^{D_r(0)}_{D_R(0)}(a_{(n)}b)_r = (a_{(n)}b)_R$ を満たす ([N, Lemma 3.2.10]) ので

$$a_{(n)}b \coloneqq \left\{(a_{(n)}b)_R\right\}_{R \in \mathbb{R}_{>0}} \in \mathcal{F}^0_{\Delta(a)+\Delta(b)-n-1}$$

が得られた．条件 (i), (ii) より $a_{(n)}b = 0$ $(n \gg 0)$ がしたがう．$\mathbf{V}(\mathcal{F})$ の頂点作用素は

$$\mathbf{V}(\mathcal{F}) \otimes \mathbf{V}(\mathcal{F}) \to \mathbf{V}(\mathcal{F})(\!(z)\!), \quad a \otimes b \mapsto Y(a,z)b \coloneqq \sum_{n \in \mathbb{Z}} z^{-n-1} a_{(n)}b$$

と定義される．

$\mu^R_{z_1,\dots,z_l}$ の定義より $a, b, c \in \mathbf{V}(\mathcal{F})$ に対して

$$\mu^R_{z,w,0}(a \otimes b \otimes c) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (z-w)^{-n-1} \mu^R_{w,0}(a_{(n)}b \otimes c) \quad (0 < |w| < |z| < R)$$

が成り立つ．これが頂点作用素の作用素積展開 ([FBZ04, §3.3.4, (3.3.10)])

$$Y(a,z)Y(b,w) = \sum_{n \in \mathbb{N}} (z-w)^{-n-1}|_{|z|>|w|} Y(a_{(n)}b, w) + :Y(a,z)Y(b,w):$$

に対応している式である．

4　主結果 2

[N, §3.4] では可換頂点代数から locally constant 因子化代数を構成した．これは定理 3.2 の逆構成になっている．

定理 4.1 ([N, Proposition 3.4.6, Proposition 3.4.9]). 可換な $\mathbb{Z}$-次数付き頂点代数 $V = \bigoplus_{\Delta\in\mathbb{Z}} V_\Delta$ で V_Δ $(\Delta \ll 0)$ および $\dim_{\mathbb{C}} V_\Delta < \infty$ $(\Delta \in \mathbb{Z})$ を満たすものに対し locally constant な正則因子化代数 $\mathbf{F}^{\mathrm{loc}}_{\overline{V}}$ が構成できる．さらに $\mathbb{Z}$-次数つき頂点代数の同型

$$\mathbf{V}(\mathbf{F}^{\mathrm{loc}}_{\overline{V}}) \cong V$$

が成り立つ．

$\mathbf{F}^{\mathrm{loc}}_{\overline{V}}$ の構成を簡単に説明する：まず [N, §2.2] において一般に可換代数 A から locally constant な因子化代数 $\mathbf{F}^{\mathrm{loc}}_{A} \colon \mathfrak{U}_{\mathbb{C}} \to \mathsf{Mod}\,\mathbb{C}$ を構成した．この構成は Lurie によって示された E_n-代数と $\mathbb{R}^n$ 上の locally constant な因子化代数の $(\infty,1)$-圏同値 ([CG17, Theorem 6.4.2]) の特別な場合になっている．条件 $V_\Delta = 0$ $(\Delta \ll 0)$ より $\overline{V} \coloneqq \prod_{\Delta\in\mathbb{Z}} V_\Delta$ 上に可換代数の構造が自然に定まるので locally constant な因子化代数 $\mathbf{F}^{\mathrm{loc}}_{\overline{V}} \colon \mathfrak{U}_{\mathbb{C}} \to \mathsf{Mod}\,\mathbb{C}$ が得られる．また V の共形ウェイト Δ と translation operator T を用いて $\mathbf{F}^{\mathrm{loc}}_{\overline{V}}$ 上に $S^1 \ltimes \mathbb{C}$-同変構造を定義することができる．ここで $\dim_{\mathbb{C}} V_\Delta < \infty$ $(\Delta \in \mathbb{Z})$ という条件を課すと有限次元線形空間 V_Δ の自然な位相を用いることで $\mathbf{F}^{\mathrm{loc}}_{\overline{V}}$ は $\mathsf{LCS}_{\mathbb{C}}$ に値をもつ $S^1 \ltimes \mathbb{C}$-同変な因子化代数になる．

導入で述べたように Bruegmann は [B20a, §1.4] において一般の頂点代数から因子化代数を構成しているが，彼の構成と定理 4.1 の構成の関係は分かっていない．さらに残念なことに今のところ定理 4.1 の構成を一般の頂点代数に拡張することはできていない．しかし定理 4.1 の構成は次のような意味で可換微分代数のジェット構成と両立するので，その点で良いものであると言える．

定理 4.2 ([N, Proposition 3.4.11]). A を有限生成可換代数とし $\mathcal{J}A$ をそのジェット代数とする ([N, Example 3.1.3, Example 3.1.6] 参照)．可換な $\mathbb{Z}$-次数付き頂点代数 $V = \bigoplus_{\Delta\in\mathbb{Z}} V_\Delta$ で定理 4.1 の条件を満たすものと因子化代数の射 $\varphi \colon \mathbf{F}^{\mathrm{loc}}_{A} \to \mathbf{F}^{\mathrm{loc}}_{V}$ に対し $S^1 \ltimes \mathbb{C}$-同変因子化代数の射 $\widetilde{\varphi} \colon \mathbf{F}^{\mathrm{loc}}_{\overline{\mathcal{J}A}} \to \mathbf{F}^{\mathrm{loc}}_{\overline{V}}$ で

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{F}^{\mathrm{loc}}_{A} \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"'] & \mathbf{F}^{\mathrm{loc}}_{\overline{\mathcal{J}A}} \arrow[d, "\widetilde{\varphi}"] \\
\mathbf{F}^{\mathrm{loc}}_{V} \arrow[r] & \mathbf{F}^{\mathrm{loc}}_{\overline{V}}
\end{tikzcd}$$

を可換にするものがただ一つ存在する．ただし $\mathbf{F}^{\mathrm{loc}}_{A} \to \mathbf{F}^{\mathrm{loc}}_{\overline{\mathcal{J}A}}$ と $\mathbf{F}^{\mathrm{loc}}_{V} \to \mathbf{F}^{\mathrm{loc}}_{\overline{V}}$ は自然な単射 $A \hookrightarrow \mathcal{J}A \hookrightarrow \overline{\mathcal{J}A}$ と $V \hookrightarrow \overline{V}$ から定まる因子化代数の射を表す．

参考文献

[N] Y. Nishinaka, *A note on vertex algebras and Costello-Gwilliam factorization algebras*, arXiv: 2408.00412v2.

[Bo86] R. Borcherds, *Vertex algebras, Kac-Moody algebras and the Monster*. Proc. Nat. Acad. Sci. USA **83** (10), 3068–3071 (1986).

[BD04] A. Beilinson, V. Drinfeld, *Chiral Algebras*, AMS Colloq. Publ. **51**, Amer. Math. Soc., Province RI (2004).

[BDHK19] B. Bakalov, A. De Sole, R. Heluani, V. G. Kac, *An operadic approach to vertex algebra and Poisson vertex algebra cohomology*, Jpn. J. Math. **14**, 249–342 (2019).

[B20a] D. Bruegmann, *Vertex Algebras and Costello-Gwilliam Factorization Algebras*, arXiv: 2012.12214v2 (2020).

[B20b] D. Bruegmann, *Geometric Vertex Algebras*, arXiv: 2012.09717v2 (2020).

[C11] K. Costello, *Renormalization and effective field theory*, Math. Surv. Monog. **170**, Amer. Math. Soc. (2011).

[C23] K. Costello, *Factorization algebra*, arXiv: 2310.06137v2.

[CG17] K. Costello, O. Gwilliam, *Factorization Algebras in Quantum Field Theory volume 1*, New Mathematical monographs **31**, Cambridge University Press (2017).

[CG21] K. Costello, O. Gwilliam, *Factorization Algebras in Quantum Field Theory volume 2*, New Mathematical monographs **41**, Cambridge University Press (2021).

[FBZ04] E. Frenkel, D. Ben-Zvi, *Vertex algebras and algebraic curves*, 2nd ed., Math. Surv. Monog. **88**, Amer. Math. Soc. (2004).

[W17] B. Williams, *The Virasoro vertex algebra and factorization algebras on Riemann sarface*, Lett. Math. Phys. **107**, 2189–2237 (2017).